1124. Maximal ideal ノ存在ニ就テ

中野秀五郎（東大）

$\mathfrak{B}$ ヲ Boolean algebra トシマス。$\mathfrak{B}$ ノ element ノ集合 $\mathfrak{J}$ ガ次ノ性質ヲ有スルトキ，即チ

1) $\mathfrak{J} \ni 0$,

2) $\mathfrak{J} \ni a,\ a \geqq b \longrightarrow \mathfrak{J} \ni b$,

3) $\mathfrak{J} \ni a, b \longrightarrow \mathfrak{J} \ni a \frown b$

ナルトキ $\mathfrak{J}$ ヲ Ideal ト呼ビマス。<u>$\mathfrak{J}_0$ ヲ任意ノ Ideal トスレバ，$\mathfrak{J}_0$ ヲ含ム最大 Ideal ガ存在スル</u>。此ノ定理ハ transfinite Induction ニヨレバ明カデアリマス。又解析學ニ於テ transfinite Induction ヲ用ヒナケレバナラヌ主ナル定理ハ此ノ定理ヨリ得ラレル

ノデアリマス。例ヘバ bicompact space ノ direct Product ハ又 bicompact デアル等。従ッテコノ定理ハ解析學ニ於テハ transfinite Induction ニ換リ得ルモノデアルト考ヘラレマス。特ニ此ノ定理ハ Auswahlprinzip カラ直接証明出来ルコトヲ此処ニ注意シタイト思ヒマス。此レハ既ニ氣ノ付カレタ方モアルトハ思ヒマスガ、Zermers ノ Wohlordnung ノ証明ガ其儘適用デキルノデアリマス。

$\mathfrak{L}$ ノ総テノ部分集合ニ其レニ屬スル element ヲ對應サセタトシマス。(Auswahlprinzip ニヨル) $\mathfrak{p}$ ヲ任意ノ Ideal デ Maximal デナイトシマス。然ルトキハ、$\mathfrak{p}$ ノ総テノ element $p \in \mathfrak{p}$ ニ對シテ $p \frown x \neq 0$, $x \,\overline{\in}\, \mathfrak{p}$ ナル element x ガ存在シマス。カヽル x ノ全體カラナル $\mathfrak{L}$ ノ部分集合ニ對應シテキル element ヲ p_+ トシマス。然ルトキハ、$\mathfrak{p} = p_+$ ヲ加ヘテ一ツノ Ideal ガ出来マス。此ノ Ideal ヲ $\mathfrak{p}_+$ ト書クコトトシマス。

二ツノ Ideal $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ガアッテ、$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ ナルトキハ $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{q}$ ト書クコトヽシマス。今 Ideal ノ集合 $\{\mathfrak{p}_\alpha\}$ ガアッテ $\{\mathfrak{p}_\alpha\}$ ヲ $\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta$ ナル任意ノ二ツニ對シテ $\mathfrak{p}_\alpha \leqq \mathfrak{p}_\beta$ カ $\mathfrak{p}_\alpha \geqq \mathfrak{p}_\beta$ ノ何レカヾ成立スルトキ、$\{\mathfrak{p}_\alpha\}$ ハ linear ordered ト云フコトトシマス。$\{\mathfrak{p}_\alpha\}$ ガ linear ordered デアルトキハ Vereinigung $\sum_\alpha \mathfrak{p}_\alpha$ ハ又

明カニIdealトナリマス。此ノIdealヲ$\bigcup \mathfrak{p}_\alpha$ト書クコトヽ致シマス。

Idealノ集合Kが次ノ性質がアルトキ，即チ

1) $K \ni \mathfrak{p} \to K \ni \mathfrak{p}_+$

2) $K \supset \{\mathfrak{p}_\alpha\}$, $\{\mathfrak{p}_\alpha\}$ linear ordered

$$\to K \ni \bigcup_\alpha \mathfrak{p}_\alpha$$

ナルトキKヲKetteト呼ブコトトシマス。

$\mathfrak{p}_0$ヲ任意ノIdealトシマス。$\mathfrak{p}_0 \leqq \mathfrak{p}$ナルスベテノIdeal $\mathfrak{p}$ハ明ラカニKetteヲナシ、然カモ$\mathfrak{p}_0$ヲ含ミ、如何ナルelementモ$\geqq \mathfrak{p}_0$デアリマス。此ノ様ナスベテノKetteノDurchschnittヲK_0トスレバ，K_0ハ此ノ如キ最小ノKetteトナリマス。

$K_0 \ni \mathfrak{n}$ノIdeal $\mathfrak{n}$が

$K_0 \ni \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} < \mathfrak{n} \to \mathfrak{p}_+ \leqq \mathfrak{n}$

ヲ満足スルトキ，normalト名ヅケマス。然ルトキハ$\mathfrak{p}_0$ハ明カニnormalデアリマス。今$\mathfrak{n}$ヲnormalトシ、$K_0 \ni \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{n}$ナル$\mathfrak{p}$ノ全部ト$K_0 \ni \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{n}_+$ナル$\mathfrak{p}$ノ全部ノ和ヲ$K_1$トスレバ，$K_1$ハ明カニKetteトナリマシテ、$K_1 \subset K_0$, $K_1 \ni \mathfrak{p}_0$デアリマスカラ，$K_0 = K_1$デナケレバナリマセン。従ッテ又$\mathfrak{n}_+$モnormalデアリマス。然カモ$\mathfrak{n}$がnormalナレバ他ノ$K_0 \ni \mathfrak{p}$ニ對シテ，$\mathfrak{p} \lesseqgtr \mathfrak{n}$が成立スルコトが同時ニ知ラレマス。

$\{\mathfrak{n}_\alpha\}$ヲlinear orderedナK_0ノnormalナ

Ideal ノ集合トシマス。先ヅ明カニ $\bigcup_{\alpha} \mathfrak{n}_{\alpha} \in K_0$ デアリマス。$K_0 \ni \mathfrak{p}$ デ何レカ一ツノ $\mathfrak{n}_{\alpha}$ ニ對シ $\mathfrak{p} < \mathfrak{n}_{\alpha}$ トナル $\mathfrak{p}$ ノ全部ト $K_0 \ni \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \geqq \bigcup_{\alpha} \mathfrak{n}_{\alpha}$ ナル $\mathfrak{p}$ ノ全部トノ和集合ヲ K_2 トスレバ，K_2 ハ又明カニ Kette トナリ、$K_2 \subset K_0$, $K_2 \ni \mathfrak{p}_0$ デアリマス。故ニ $K_2 = K_0$ デナケレバナリマセン。

從ツテ $K_0 \ni \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} < \bigcup_{\alpha} \mathfrak{n}_{\alpha}$ ナレバ、何レカ一ツノ α ニ對シ $\mathfrak{p} < \mathfrak{n}_{\alpha}$、從ツテ $\mathfrak{p}_{+} \leqq \mathfrak{n}_{\alpha} \leqq \bigcup_{\alpha} \mathfrak{n}_{\alpha}$ トナリマスカラ、$\bigcup_{\alpha} \mathfrak{n}_{\alpha}$ ハ又 normal デアリマス。

以上ニヨリ K_0 ノ normal ナ Ideal ノ全体ヲ N トシマスト，N ハ又 Kette トナリマシテ、$N \subset K_0$, $N \ni \mathfrak{p}_0$ デアリマス。故ニ $N = K_0$　然カモ N ハ linear ordered デナケレバナリマセンカラ、$\sum N$ ハ Ideal トナリ、然カモ $\mathfrak{p}_0$ ヲ含ム Maximal Ideal デアリマス。

以上ノ証明ハ $\mathfrak{L}$ ガ Boolean algebra デナクトモ semi-ordered デ任意ノ a, b ニ對シ $a \geqq c$, $b \geqq c$ ナル c ガ存在スレバ，其ノママ適用サレルコトハ明カデアリマス。

（18. 4. 28）